Clasa a IV. a

Subiectul I.

Barem de evaluare și corectare

Din oficiu - - - - - - - - (1p)

a) 3 pixuri - - - - - 5 stilouri - - - - 34 lei.

4 pixuri - - - - 7 stilouri - - - - - 47 lei.

Prima cumpărătură o mărim de 4 ori, iar a doua de 3 ori pentru a avea același număr de pixuri.

12 pixuri - - - - 20 stilouri - - - 136 lei.

12 pixuri - - - - - 21 stilouri - - - - 141 lei. (1p)

1 stilon - - - - 5 lei. (1p)

3 pixuri - - - - - - - - - 34 lei − 5 lei × 5 = 9 lei.

1 pix - - - - - 9 lei : 3 = 3 lei. (1p)

b) primul termen = 4 = 1 + (1 + 2) - - - - - - (1p)

al II-lea termen = 7 = 1 + (1 + 2 + 3)

al III-lea termen = 11 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4)

al IV-lea termen = 16 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)

al V-lea termen = 22 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6).

al VI-lea termen = 29 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7) - - - - (1p)

- - - - - - - - - - - - -

al 50-lea termen = 1327 = 1 + (1 + 2 + ... + 50 + 51) ... (1p)

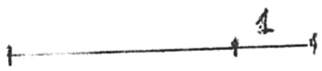
Cls. IV.

Subiectul al II-lea

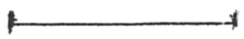
Barem de corectură și evaluare

Din oficiu . . . . (1p)

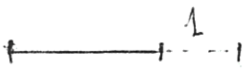
a)



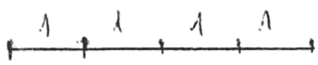
Numărul băieților din familia lui Mihai. (1p)



Numărul fetelor din familia lui Mihai (1p)



Numărul surorilor Mariei .. (1p)



Numărul fraților Mariei .. (1p)

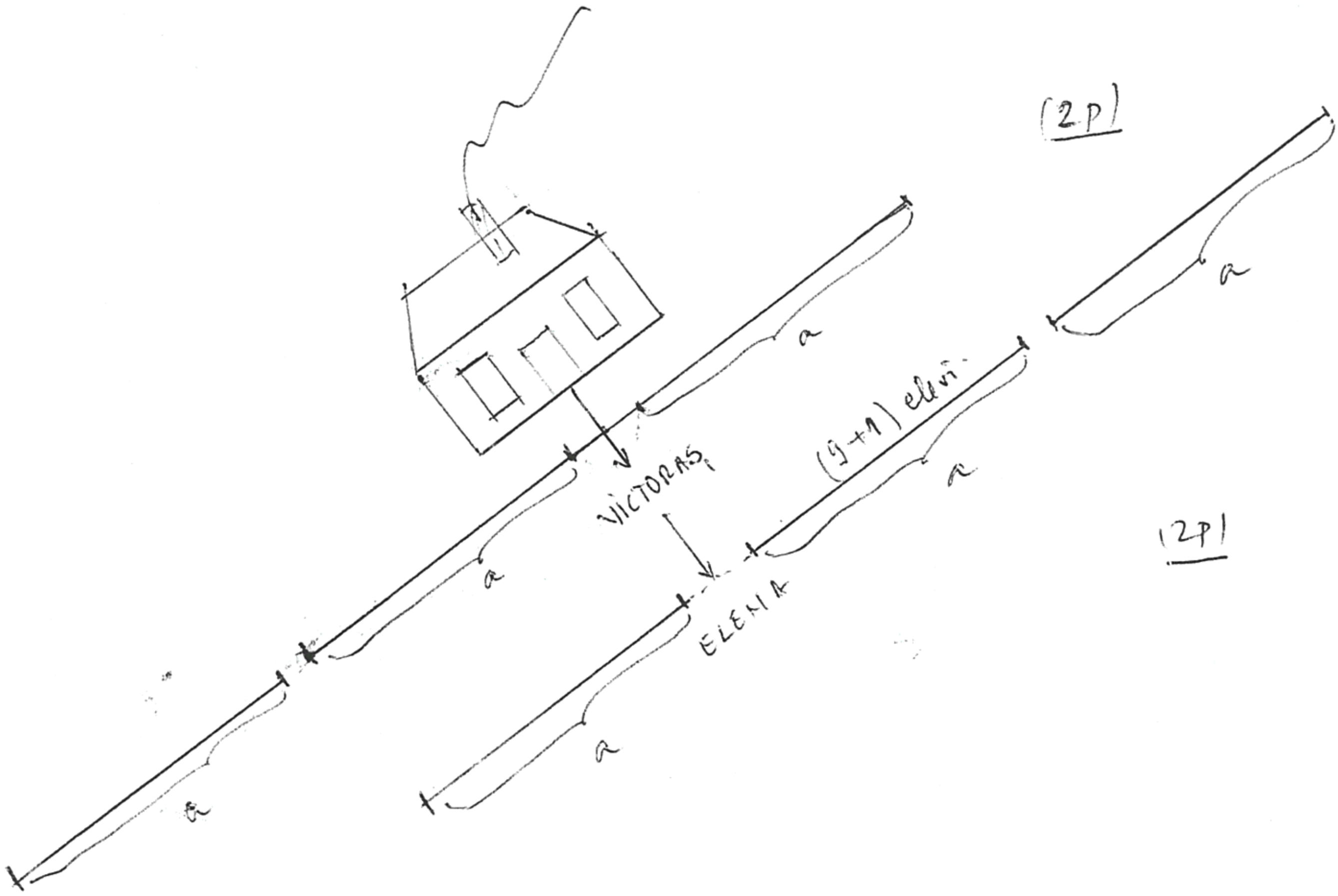
Deci Mihai are 3 frați și 3 surori. . . . (2p)

Clasa a IV-a

Subiectul III.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu - - - - - - - - - - - - (1p)



(2p)

(2p)

$a = 9+1 = 10$ - - - - - - - - - - - (1p)

În total pe munte au fost $10 \times 3 + 1 = 31$ de elevi. ... (1p)

CLASA a V-a

Subiectul I.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu .... (1p)

a) **Metoda figurativă**

Reprezintă numărul oilor vândute de:

primul țăran.

.... al doilea țăran.

+3 .... al treilea țăran. .... (1p)

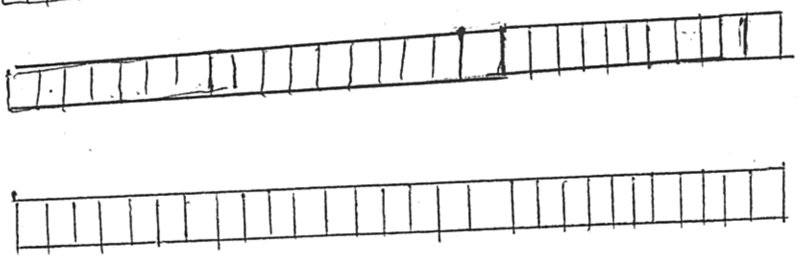
+6+4

Reprezintă numărul inițial de oi ale:

+13 ... primului țăran

+13+3 .. celui de-al doilea țăran

+13+10 ... celui de-al treilea țăran ... (1p)



+52 = 276 oi

276 − 52 = 224 oi

224 : 28 = 8 oi ... (1p)

Inițial: primul țăran a avut: 8 × 8 + 13 = 77 de oi

al doilea a avut: 9 × 8 + 16 = 88 de oi

al treilea a avut: 11 · 8 + 23 = 111 oi ... (1p)

b) Dacă $x = 0$, din $z^2 \leq 0 \Rightarrow z = 0$ și din $y^2 \leq z \Rightarrow y = 0$. .... (1p)

Analog, dacă $y = 0$ sau $z = 0$.

Dacă x, y, z sunt numere naturale nenule, înmulțind relațiile parte cu parte obținem: $x^2y^2z^2 \leq xyz \Leftrightarrow xyz \leq 1$, de unde $x = y = z = 1$.

... $(0,0,0)$ și $(1,1,1)$ ... (1p)

CLASA a V-a

Subiectul II

Barem de evaluare și corectură

Din oficiu - - - - - (1p)

Fie $\overline{abc}$, respectiv $\overline{abc}+1$ cele două numere.

a) – dacă $c \neq 9$, atunci $\overline{abc}+1 = \overline{ab(c+1)}$ și condiția din enunț conduce la relația:

$a+b+c = 3\cdot(a+b+c+1)$ sau $2a+2b+2c+3=0$, nu convine . - (1p).

– dacă $c=9$ avem două cazuri:

1) $b \neq 9 \Rightarrow \overline{ab9}+1 = \overline{a(b+1)0}$, iar condiția din enunț conduce la $3\cdot(a+b+1+0) = a+b+9 \Leftrightarrow 2a+2b=6 \Leftrightarrow a+b=3 \Leftrightarrow$ - - - - - - - - - (1p)

$\Leftrightarrow \overline{abc} \in \{129; 219; 309\}$

2) $b=9 \Rightarrow \overline{a99}+1 = \overline{(a+1)00}$ și atunci condiția din enunț conduce la:

$a+9+9 = 3\cdot(a+1+0+0)$, de unde $2\cdot a = 15$, nu convine (1p).

Deci $\overline{abc} \in \{129; 219; 309\}$. - - - - - - - (1p)

b) $3^{93} = (3^3)^{31} = 27^{31}$ și $2^{155} = (2^5)^{31} = 32^{31}$. - - - - (1p)

$a = 2^{3^{93}} = 2^{27^{31}}$ și $b = 3^{2^{155}} = 3^{32^{31}}$.

$\left.\begin{array}{l} 2<3 \text{ și} \\ 27<32 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 27^{31} < 32^{31} \\ 2<3 \end{array}\right| \Rightarrow a<b$ - - - - (1p)

Subiectul III

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu - - - - - - - (1p).

Aplicând relația din împărțirea cu rest avem: - - - - - - (1p)

$\overline{abc} = \overline{cba} \cdot 2 + 52$.

Efectuând descompunerea zecimală avem:

$100a + 10b + c = 200c + 20b + 2a + 52 \iff 98a = 10b + 199c + 52$. (*)

$98a$; $10b$; 52 numere pare din (*) rezultă c = cifră pară - - - - - - - (1p)

nenulă - - -

- dacă $c \geq 6$, atunci $199c \geq 1194$ și cum $98a \leq 882$, - - - (1p)

Contradicție! - - - - - (1p)

- deci c ia valorile 2 și 4 ($c \neq 0$). - - - -
- dacă $c = 2$, din (*) $\Rightarrow 98a = 10b + 450 \Rightarrow a = 5$ și $b = 4$, soluție! (1p)
- dacă $c = 4$, din (*) $\Rightarrow 98a = 10b + 848 \Rightarrow a \geq 9$.
- $a = 9 \Rightarrow 882 = 10b + 848 \Rightarrow 10b = 34$, contradicție!

Deci numărul căutat este 542. - - - - (1p)

VI

Subiectul I.

Barem de evaluare și notare

Din oficiu - - - - - - - - - - - - (1p)

a) $15 / \overline{cdab}$ și $a>b>c>d \Rightarrow b=5$.

Din $4/\overline{abcd}$; $c>d$ și $b>c \Rightarrow 1 \le c \le 4$ și $\overline{cd} \in \{20; 32; 40\}$ ... (1p)

$15/\overline{cda5} \Rightarrow 3/\overline{cda5}$.

$3/\overline{cda5}$ și $\overline{cd}=20$ iar $a>5 \Rightarrow a=8$ și $\overline{abcd}=8520$, soluție ... (1p)

$3/\overline{cda5}$ și $\overline{cd}=32$, iar $a>5 \Rightarrow a=8$ și $\overline{abcd}=8532$, soluție ... (1p)

$3/\overline{cda5}$ și $\overline{cd}=40$, iar $a>5 \Rightarrow a \in \{6; 9\}$ și $\overline{abcd} \in \{6540; 9540\}$, soluții. - - - - - (1p)

Deci $\overline{abcd} \in \{6540; 8520; 8532; 9540\}$

b) $\{1011; 1012; \ldots; 2020\} \subseteq A$. ... (1p)

$A=\{1011; 1012; \ldots; 2020\} \cup B$, unde $B \subseteq \{1; 2; \ldots; 1010\}$

Mulțimea valorilor mulțimii A este egală cu mulțimea submulțimilor mulțimii B - - - - - 2^{1010} valori. (1p)

VII.

$3^{?}$ $\qquad 3^{p} = \frac{1}{3}$

Intervalul II

Din oficiu .... (1p)

$3^5 = 243$
$3^6 = 729$
$3^7 \; 2187$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$;

$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1}{3}$;

$\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{26}{27} = \frac{1}{3}$;

$\frac{27}{28} \cdot \frac{28}{29} \cdot \ldots \cdot \frac{80}{81} = \frac{1}{3}$; .... (1p)

$\frac{81}{82} \cdot \frac{82}{83} \cdot \ldots \cdot \frac{242}{243} = \frac{1}{3}$;

$\frac{243}{244} \cdot \frac{244}{245} \cdot \ldots \cdot \frac{728}{729} = \frac{1}{3}$.

$\frac{729}{730} \cdot \frac{730}{731} \cdot \ldots \cdot \frac{2186}{2187} = \frac{1}{3}$. .... (1p)

Cum $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ putem avea: (1p)

$E = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots + \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9}\right) + \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{26}{27}\right) -$ (1p)

$- \left(\frac{27}{28} \cdot \frac{28}{29} \cdot \ldots \cdot \frac{80}{81}\right) + \left(\frac{81}{82} \cdot \frac{82}{83} \cdot \ldots \cdot \frac{242}{243}\right) -$

$- \left(\frac{243}{244} \cdot \frac{245}{246} \cdot \ldots \cdot \frac{728}{729}\right) + \left(\frac{729}{730} \cdot \frac{730}{731} \cdot \ldots + \frac{2186}{2187}\right) =$ (1p)

$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ .... (1p)

Sau altă variantă, de exemplu:

$\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

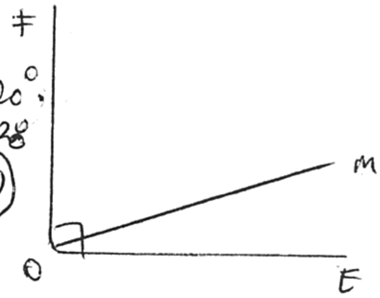
cl VI-a

Subiectul III

Barem de evaluare și corectare

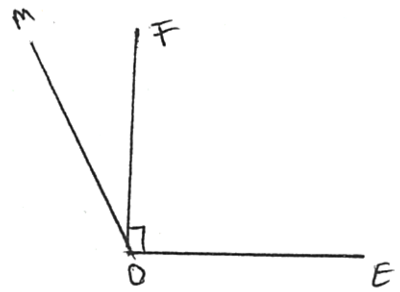
Din oficiu - - - - - - - - (1p)

a) (OM ⊂ int. ∢EOF.



$\frac{m(\sphericalangle EOM)}{m(\sphericalangle FOM)} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{m(\sphericalangle EOM)}{m(\sphericalangle EOM)+m(\sphericalangle FOM)} = \frac{2}{9} \Rightarrow m(\sphericalangle EOM) = 20°$ (1p)

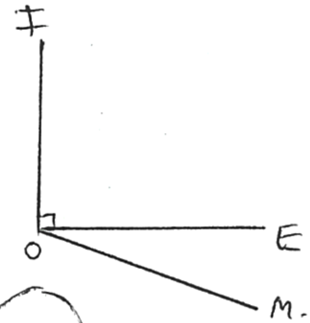
(OM ⊄ int. ∢EOF.



I) (OF ⊂ int. ∢MOE ⇒

$\frac{m(\sphericalangle EOM)}{m(\sphericalangle FOM)} > 1$, contradicție! - - - (1p)

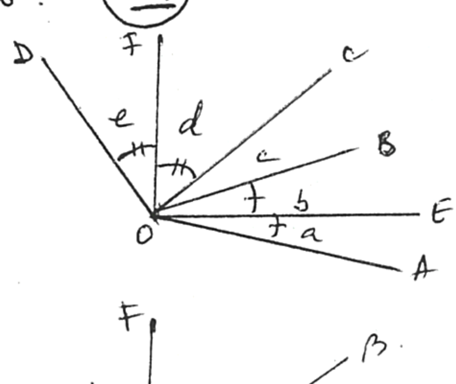
II) (OE ⊂ int (∢MOF), atunci



$\frac{m(\sphericalangle MOE)}{m(\sphericalangle FOM)} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{m(\sphericalangle MOE)}{m(\sphericalangle FOM) - m(\sphericalangle MOE)} = \frac{2}{7-2} = \frac{2}{5}$,

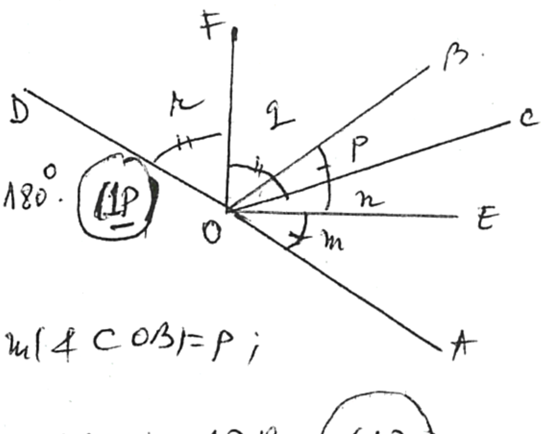
de unde $\frac{m(\sphericalangle MOE)}{90°} = \frac{2}{5} \Rightarrow m(\sphericalangle MOE) = 36°$.

Deci $m(\sphericalangle MOE) = 20°$ sau $m(\sphericalangle MOE) = 36°$. (1p)



b) - dacă (OB ⊂ int. ∢COE, atunci:

notăm $m(\sphericalangle AOE) = a$; $m(\sphericalangle EOB) = b$; $m(\sphericalangle BOC) = c$;
$m(\sphericalangle FOC) = d$ și $m(\sphericalangle FOD) = e$.

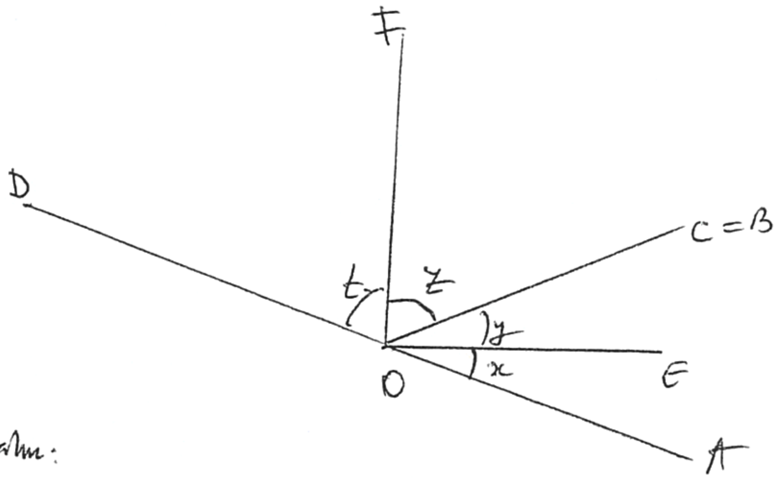


$m(\sphericalangle NOP) = m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle BOD) =$

$= (a+b+c) + (c+d+e) = (b+b) + (c+d+c+d) = 180°$. (1p)

- dacă (OC ⊂ int BOE, atunci:
notăm $m(\sphericalangle AOE) = m$; $m(\sphericalangle EOC) = n$; $m(\sphericalangle COB) = p$;
$m(\sphericalangle BOF) = q$ și $m(\sphericalangle DOF) = r$.

$m(\sphericalangle NOP) = \ldots + q + r = (n+p) + n + q + q + p = 180°$ (1p)



- dacă $(OC = (OB$, arătăm:

$m(\angle AOE) = x$; $m(\angle EOC) = y$; $m(\angle BOF) = z$ şi $m(\angle FOD) = t$.

$m(\angle NOP) = x + y + z + t = 2(z+y) = 180^\circ$. . . . (1p)

Clasa a VII-a

Subiectul I

Determinați numerele naturale nenule x, y, z pentru care

$$\frac{3x}{3x+1} = \frac{2y}{2y+1} = \frac{x+4z}{z+6}.$$

(G.M. 5 / 2015, Ion Neață, Supliment)

Barem de corectare și evaluare

Din oficiu ------- (1p)

a) Deoarece $\frac{3x}{3x+1} < 1$, avem $\frac{x+4z}{z+6} < 1$, de unde $x+3z<6$. ------ (1p)

Putem avea: $x=1, z=1$ sau $x=2, z=1$.

$x=z=1$ conduce la $\frac{3}{4} = \frac{2y}{2y+1} = \frac{5}{7}$, contradicție! (1p)

$x=2$ și $z=1$ conduce la $\frac{6}{7} = \frac{2y}{2y+1} = \frac{6}{7}$, de unde $14y = 12y+6$,

adică $y=3$. --- (1p)

Prin urmare, $x=2$; $y=3$ și $z=1$.

b) $\sqrt{\overline{abcd}} = \overline{ab} + \sqrt{\overline{cd}} \Leftrightarrow \overline{abcd} = \overline{ab}^2 + 2\cdot\overline{ab}\cdot\sqrt{\overline{cd}} + \overline{cd} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\overline{cd}} = \frac{\overline{abcd} - \overline{ab}^2 - \overline{cd}}{2\cdot\overline{ab}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{\overline{cd}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{cd} = k^2, k \in \mathbb{N}^*$.

------- (1p)

Deci $\overline{cd} \in \{16; 25; 36; 49; 64; 81\}$.

$\overline{cd} = 16 \Rightarrow \sqrt{\overline{ab16}} = \overline{ab} + 4 \Rightarrow \overline{ab}\cdot 100 + 16 = \overline{ab}^2 + 8\overline{ab} + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{ab} = 92$ și $\overline{abcd} = 9216$.

---- (1p)

$\overline{cd} = 25 \Rightarrow \overline{ab} = 90$ și $\overline{abcd} = 9025$

$\overline{cd} = 36 \Rightarrow \overline{ab} = 88$ și $\overline{abcd} = 8836$

$\overline{cd} = 49 \Rightarrow \overline{ab} = 86$ și $\overline{abcd} = 8649$

$\overline{cd} \in \{64; 81\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{84; 82\}$ și $\overline{abcd} \in \{8464; 8281\}$.

Deci $\overline{abcd} \in \{8649; 8836; 9025; 9216; 8464; 8281\}$ ---- (1p)

CLASA a VII-a

Subiectul II

Barem de corectură și evaluare:

Din oficiu ------- (1p)

Avem $bc+\frac{a}{b}+\frac{1}{c}=\frac{9}{b\cdot c} \Leftrightarrow b^2c^2+ac+b=9$; $b\neq 0$; $c\neq 0$, (1) ... (1p)

Din $b\neq 0$; $c\neq 0$ și (1) $\Rightarrow b<3$. ------- (1p)

- dacă $b=1$, din (1) $\Rightarrow c^2+ac=8 \Leftrightarrow c(a+c)=8=1\cdot 8=2\cdot 4$. ------- (1p)

pentru că $c<a+c$ $(a\neq 0)$.

$c=1 \Rightarrow a+c=8 \Rightarrow a=7$, soluție.

$c=2 \Rightarrow a+c=4 \Rightarrow a=2$, soluție. ------- (1p)

- dacă $b=2$, din (1) $\Rightarrow 4c^2+ac=7 \Rightarrow c(4c+a)=7=1\cdot 7$;

deoarece $c<4c+a$. Deci $c=1$ și $4c+a=7$, de unde ------- (1p)

$a=3$, soluție

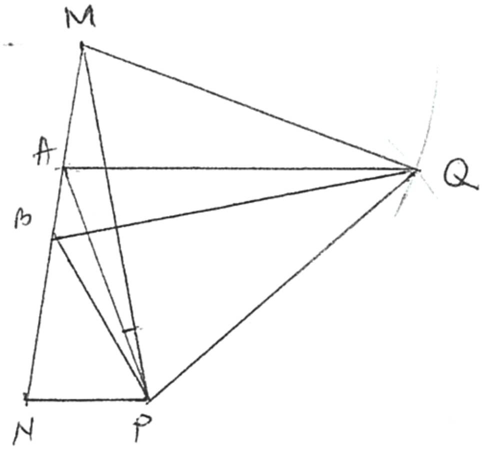
Urmează că $\overline{abc}\in\{212; 321; 711\}$. ------- (1p)

Cls. a VII -a

Subiectul III

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu - - - - - - - - (1p)



Construim triunghiul echilateral MPQ în exteriorul $\triangle MNP$. (1p)

$$\left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle MNP) = m(\sphericalangle AMQ) = 80^\circ \\ (MA) \equiv (NP) \\ MQ \equiv (MP) \equiv (MN) \end{array}\right] \overset{(L.U.L)}{\Longrightarrow} \triangle QMA \equiv \triangle MNP \Rightarrow \quad (1p)$$

$\Rightarrow m(\sphericalangle MQA) = m(\sphericalangle NMP) = 20^\circ$ și $m(\sphericalangle AQP) = 40^\circ$
$(AQ) \equiv (MP) \equiv (PQ)$. - - - - (1p)

Deci QAP este isoscel, de unde $m(\sphericalangle APQ) =$
$= \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$ și $m(\sphericalangle APB) = 10^\circ$, iar $m(\sphericalangle MPB) = 20^\circ$. (2p)

Urmează că $m(\sphericalangle NPB) = 60^\circ$ și $m(\sphericalangle NBP) = 40^\circ$. (1p)

(V.D)

VIII

Barem de corectură și evaluare

Subiectul I.

Din oficiu .... (1p)

a) $\frac{2-a^2}{a}+\frac{2-b^2}{b}+\frac{2-c^2}{c}\geq 7 \iff 2\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(a+b+c)\geq 7 \iff$ .... (1p)

$\iff \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{2}$.

Însă $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$, oricare ar fi $a>0, b>0; c>0$. .... (1p)

Deci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{2}$.

b) Să se demonstreze că există cel puțin un număr natural scris în baza zece cu cifre identice divizibile cu 2019.

Fie a cifră nenulă în baza 10 și următoarele 2020 de numere:

$x_1=a;\ x_2=\overline{aa};\ x_3=\overline{aaa};\ \ldots;\ x_{2019}=\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{2019\text{ cifre}};\ x_{2020}=\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{2020\text{ cifre}}$ (1p)

Conform principiului cutiei printre cele 2020 de numere distincte două câte două, există cel puțin două care dau același rest la împărțirea cu 2019. .... (1p)

Dacă x_m și x_n sunt două dintre cele 2020 de numere cu $1\leq m<n\leq 2020$ astfel încât $x_m=2019k_1+r$ și $x_n=2019k_2+r$, cu $k_1,k_2\in\mathbb{N}^*$ și $k_1<k_2$, atunci avem: $x_n-x_m=2019\cdot(k_2-k_1)=\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{(n-m)\text{ cifre}}\cdot 10^m$. ... (1p)

Deci $x_n-x_m=x_{n-m}\cdot 10^m=2019\cdot(k_2-k_1)$.

Cum $(2019,10^m)=1$, rezultă că $2019/x_{n-m}$, unde $x_{n-m}=\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{(n-m)\text{ cifre}}$, a orice cifră nenulă din sistemul zecimal ... (1p)

CLASA a VIII-a

Subiectul II

Barem de notare și evaluare

Din oficiu - - - - - - - - (1p)

$a^2+a=0 \iff a\in\{0;-1\}$.

Dacă $a=-1$ sau $a=0$, atunci $x_1=x_2=\ldots=x_{2018}=x_{2019}=1$. ...... (1p)

Notăm $a^2+a=b$.

Atunci $x_1=\dfrac{1}{b+1}$; $x_2=\dfrac{2}{b+2}$; $x_3=\dfrac{3}{b+3}$; ...; $x_{2019}=\dfrac{2019}{b+2019}$.

Dacă $a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$, atunci $a^2+a>0$, adică $b>0$ ... (1p)

$b>0 \Rightarrow b>\dfrac{b}{2}>\dfrac{b}{3}>\ldots>\dfrac{b}{2019}>0$, de unde

$b+1>\dfrac{b+2}{2}>\dfrac{b+3}{3}>\ldots>\dfrac{b+2019}{2019} \Rightarrow$ - - - - - - - (1p)

$\Rightarrow \dfrac{1}{b+1}<\dfrac{2}{b+2}<\dfrac{3}{b+3}<\ldots<\dfrac{2019}{b+2019}$,

adică $x_1<x_2<\ldots<x_{2018}<x_{2019}$. - - - - - - - (1p)

Dacă $a\in(-1;0)$, atunci $b<0$.

Din $(2x+1)^2\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R} \Rightarrow x^2+x\geq -\dfrac{1}{4} \Rightarrow -\dfrac{1}{4}\leq b<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{4}\leq b<\dfrac{b}{2}<\dfrac{b}{3}<\ldots<\dfrac{b}{2018}<\dfrac{b}{2019}$, de unde. (1p)

$\dfrac{1}{b+1}>\dfrac{2}{b+2}>\dfrac{3}{b+3}>\ldots>\dfrac{2019}{b+2019}$, adică

Deci $x_{2019}<x_{2018}<\ldots<x_2<x_1$. - - - (1p)

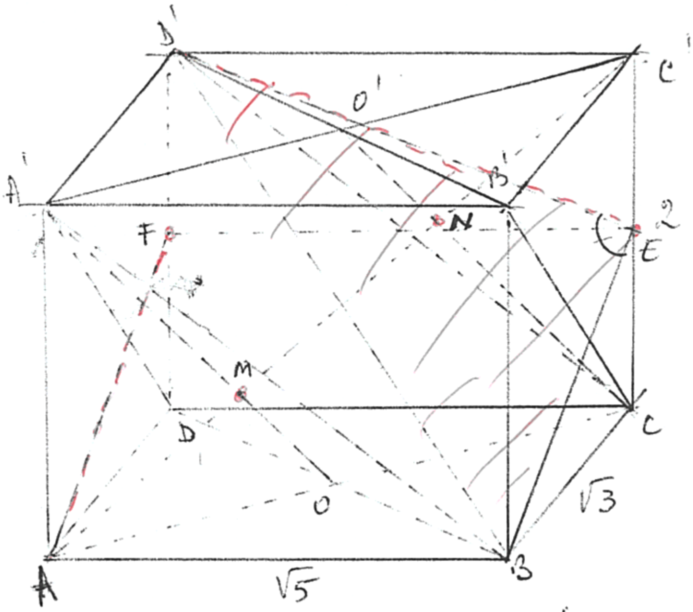
Deci $a\in(-1;0)$.

VIII

Subiectul III

Barem de corectare și evaluare

Din oficiu .... (1p)



a) Fie punctele O și O' centrele bazelor ABCD și, respectiv, A'B'C'D' ale paralelipipedului.

Din $A'O \subset (A'BD)$ și $CO' \subset (B'CD') \Rightarrow$ dreptele $A'O$, AC, CO' și AC' sunt coplanare, deci $\{M\} = A'O \cap AC'$ și $\{N\} = O'C \cap AC'$ .... (1p)

$\triangle MAO \sim \triangle MC'A'$ $(AO \parallel A'C') \Rightarrow \frac{AM}{MC'} = \frac{AO}{A'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow AM = \frac{1}{3}AC'$, (*)

$\triangle NO'C' \sim \triangle NCA$ $(O'C' \parallel AC) \Rightarrow \frac{NC'}{AN} = \frac{O'C'}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow C'N = \frac{1}{3}AC'$ (**) (1p)

$OC \overset{\parallel}{\equiv} A'O' \Rightarrow A'OCO'$ paralelogram $\Rightarrow O'N \parallel A'M$.

O' mijlocul lui $(A'C') \Rightarrow (MN) \equiv (NC')$, (***).

Din (*), (**) și (***) $\Rightarrow MN = \frac{1}{3}AC'$.

Însă $AC' = \sqrt{5+3+4} = 2\sqrt{3}$ cm și $MN = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm. .... (1p)

b) $(FE) \equiv (AB)$ și $AB \parallel FE \Rightarrow ABEF$ paralelogram $\Rightarrow AF \parallel BE \Rightarrow$ ...... (1p)

$\Rightarrow \sphericalangle(AF, D'E) \equiv \sphericalangle BED'$.

În $\triangle BED'$ aplicând teorema cosinusului avem:

$BD'^2 = D'E^2 + BE^2 - 2 \cdot D'E \cdot BE \cdot \cos(\sphericalangle BED')$, de unde

$$\cos(\sphericalangle BED') = \frac{D'E^2 + EB^2 - BD'^2}{2D'E \cdot BE} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$$ (1p)

$\sin^2(\sphericalangle BED') = 1 - \cos^2(\sphericalangle BED') = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$, $\sin(\sphericalangle BED') > 0$. (1p)

de unde $\sin(\sphericalangle BED') = \frac{\sqrt{138}}{12}$, deoarece